

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА α
В РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ
ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Л. ДЕЙНЕЖЕНКО, Н. И. САБЛИН

(Представлена научным семинаром НИИ ядерной физики, электроники и автоматики)

1. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = \bar{b}, \quad (1)$$

$A = \{a_{ij}\}$ — невырожденная матрица,

$x = \{x_j\}$, $b = \{b_i\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Если правая часть системы (1) задана с некоторой погрешностью $\delta: \|b - \bar{b}\| \leq \delta$ и матрица A плохо обусловлена (число обусловленности матрицы A $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ велико), то задача нахождения нормального решения \bar{x} [1] некорректна по Адамару, так как решение (1) неустойчиво.

Будем пользоваться евклидовой нормой вектора $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ и согласованной с ней спектральной нормой матрицы $\|A\| = \mu_1 = \max \mu_i$, где μ_i — спектральные числа матрицы A .

2. Рассмотрим функционал [1].

$$M^\alpha [x, A, b] = \|Ax - b\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Согласно [1] x^{α_i} , соответствующее значению параметра регуляризации α_i , $i = 1, 2, \dots$ и минимизирующее функционал $M^\alpha [x, A, b]$, дает устойчивое приближение к нормальному решению системы (1).

Для нахождения минимума функционала (2) решаем уравнение Эйлера для $M^\alpha [x, A, b]$ [2].

$$(A^T A + \alpha E)x^\alpha = A^T b. \quad (3)$$

3. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $x^\alpha \in R^n$, $x^\alpha \neq 0$ минимизирует функционал $M^\alpha [x, A, b]$ и параметр регуляризации $\alpha \in \{\alpha_i\}$ $i = 1, 2, \dots$ выбирается по принципу невязки [3], тогда выполняется неравенство

$$\alpha \leq \alpha_b = \|A\|^2 \frac{\delta}{\|b\| - \delta}. \quad (4)$$

Доказательство. Из уравнения (3) $\alpha E x^\alpha = A^T (b - A x^\alpha)$,

$$\alpha \leq \|A\| \frac{\|b - Ax^\alpha\|}{\|x^\alpha\|}. \quad (5)$$

$$\text{Замечаем, что } \|x^\alpha\| \geq \frac{\|Ax^\alpha\|}{\|A\|} \geq \frac{\|b\| - \|Ax^\alpha - b\|}{\|A\|}$$

и $\|b\| - \|Ax^\alpha - b\| > 0$, ибо в противном случае $M^\alpha[0, A, b] < M^\alpha[x^\alpha, A, b]$, что противоречит условию теоремы. Подставляя в (5) оценку снизу для x^α , получаем

$$\alpha \leq \|A\|^2 \frac{\|Ax^\alpha - b\|}{\|b\| - \|Ax^\alpha - b\|}.$$

Если параметр регуляризации выбирается из принципа невязки, то $\|Ax^\alpha - b\| \leq \delta$ и получаем (4).

Замечание: неравенство (4) дает начальное приближение при выборе параметра регуляризации α по принципу невязки.

4. Как указывалось в [4], где другим способом получено неравенство (4) для нормированных пространств и линейного ограниченного оператора A , оценка для α снизу через невязку без дополнительных предположений не существует, поэтому предлагается оценка при следующих предположениях.

Теорема 2. Если при некоторых значениях параметра α матрица $A^T A + \alpha E$ обусловлена лучше, чем матрица A системы (1) с числом обусловленности $k(A)$, то справедливо неравенство

$$\alpha > \alpha_n = \|A\|^2 \frac{1}{k(A)}. \quad (6)$$

Доказательство. Обозначим характеристические числа матриц $A^T A + \alpha E$ и $A^T A$, расположенные в порядке невозрастания, соответственно $\{\gamma_s\}$, $\{v_s\}$, $s=1, 2, \dots, n$. Тогда $\gamma_1 = v_1 + \alpha$, $\gamma_n = v_n + \alpha$ ([5], стр. 103). Учитывая, что $k(A^T A + \alpha E) < k(A)$ по условию теоремы и $\|A\| = \sqrt{v_1}$, получаем (6).

5. При построении различных регуляризующих алгоритмов в [6] применяется функция, использующая спектр оператора $A^* A$ (A^* — оператор, сопряженный к A). Число обусловленности — $k(A^* A)$ непосредственно связано со спектром оператора $A^* A$. Интересно применение функции, характеризующей свойства оператора A , определенной на $[\alpha_n, \alpha_b]$, к исследованию поведения регуляризованных решений системы (3).

В качестве такой функции предлагается

$$f(\alpha) = \sqrt{k(A^T A + \alpha E)}.$$

Теорема 3. Функция $f(\alpha)$ определена на $[0, \infty]$ непрерывна, монотонно убывает и значения ее исчерпывают замкнутый интервал

$$[k(A), 1].$$

Доказательство следует из представления $f(\alpha)$ в виде

$$f(\alpha) = \sqrt{1 + \frac{v_1 - v_n}{v_n + \alpha}}.$$

и оценок (4) и (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 3, 591—594.
2. В. В. Воеводин. Журнал вычисл. математики и матем. физики, 1969, т. 9, № 3, 673—675.
3. В. А. Морозов. О решении функциональных уравнений методом регуляризации. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 3, 510—512.
4. В. А. Винокуров. Два замечания о выборе параметра регуляризации. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 2, 481—483.
5. Дж. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Мир», 1970.
6. А. Б. Бакушинский. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1967, т. 7, № 3, 672—677.